FEUILLE DE TD

Matrices, Par 5 points passe une conique, $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

---

Matrices

Exercice 1.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 2 & -4\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots\\ n\end{pmatrix} + 5.\begin{pmatrix}n\\ n-1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}10 & 0 & 3\\ 7 & -2 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

---

1. $\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 8 & 9 & -5\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$
2. $\begin{pmatrix}5n+1\\ 5n-3\\ 5n-7\\ \vdots\, n+5\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ Le coefficient $a_{1,k}$ vaut $5(n-(k-1))+k = 5n+5-4k$.
3. Cette opération n'a pas de sens !

Exercice 2.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^2$
3. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$

---

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -1 & 6 & 0\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$
3. Cette opération n'a pas de sens !
4. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.(-1)+2.2+3.4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\end{pmatrix} = 15$

Exercice 3. On pose $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - A - 2I_3$.
- En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

• Le calcul donne : $A^2 =$).(
On remarque que $A^2 = A + 2I_3$, donc $A^2 - A - 2I_3 = 0$.
• On a
$$0 = A^2 - A - 2I_3 = A(A - I_3) - 2I_3,$$
c'est-à-dire
$$I_3 = A\frac{A - I_3}{2}.$$
Comme les matrices A et $B = \frac{A-I_3}{2}$ commutent ($AB = BA$), on en déduit que A est inversible, et que son inverse vaut
$$A^{-1} = \frac{A - I_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $N^m = 0$ pour un certain entier $m \geq 1$. (on dit que N est **nilpotente**)
• Montrer que N n'est pas inversible.
• Montrer que $I_n - M$ est inversible.

• Si N était inversible, alors $N^m = N \times \ldots \times N$ serait inversible, pour tout $m \geq 1$. Or, pour m assez grand on a $N^m = 0$, et la matrice nulle n'est pas inversible.
Donc, N n'est pas inversible. • Soit $m \geq 1$ tel que $N^m = 0$.
Les matrices N et I_n commutent ($N.I_n = I_n.N = N$). On peut alors utiliser la formule de la somme géométrique.
Cela donne :

$$(I_n - N)(I_n + N + N^2 + \ldots + N^{m-1}) = I_n + N + \ldots + N^{m-1} - (N + N^2 + \ldots + N^m) = I_n - N^m = I_n.$$

Les matrices $I_n - N$ et $B = I_n + N + \ldots + N^{m-1}$ commutent, donc on a $B(I_n - N) = (I_n - N)B = I_n$. La matrice $I_n - N$ est donc inversible, d'inverse $(I_n - N)^{-1} = I_n + N + N^2 + \ldots + N^{m-1}$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 2I_3$.
• Calculer B^n pour tout $n \geq 0$.
• En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 0$.

• On a $B^0 = I_3$, $B^1 = B$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B^3 = 0$.
Ainsi, on en déduit que $B^n = 0$ pour tout $n \geq 3$.
• On a $A = 2I_3 + B$. Les matrices $2I_3$ et B commutent ($2I_3 \cdot B = B \cdot 2I_3 = 2B$), ce qui permet d'utiliser la formule du binôme :

$$A^n = (2I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} B^k \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} = 1.2^n.I_3 + B.n.2^{n-1} + B^2.\frac{n(n-1)}{2}.2^{n-2}.$$

C'est-à-dire : $A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n(n-1)}{8} \\ 0 & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Echelonner les matrices suivantes avec des opérations élémentaires sur les lignes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 = -I_n$.

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Pour $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, résoudre l'équation $AX = Y$.

---

1. On a $I_n = -A^2 = (-A)A = A(-A)$. Donc A est inversible, d'inverse $-A$.
2. Comme A est inversible, on a $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$. L'équation $AX = Y$ possède donc une unique solution, qui est $A^{-1}Y = -AY$.
   Dans cette siuation (A inversible, et A^{-1} est connu), on a pu résoudre le système linéaire directement.

Exercice 8. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 + x_2 & = & 1 \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + x_2 + 0 & = & 1 \end{array} \right.$

Exercice 9.
Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 14 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} a & 2a \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.
Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{K}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
4. B, B^2, et B^3, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 11.
Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure :
$A = \begin{pmatrix} a_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $\Pi_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors $rg(A) = n$.
2. Montrer que si $\Pi_{i=1}^n a_i = 0$, alors $rg(A) < n$.

---

1. Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, vues comme vecteurs dans $\mathbb{K}^n$.
On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Comme $\Pi_{i=1}^n a_i \neq 0$, on a $a_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
La forme de A donne : $C_i = a_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i} e_j$.
Soient $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que $b_1 C_1 + \ldots + b_n C_n = 0$.
On montre par récurrence descendante que les nombres $b_n, \dots, b_1$ sont nuls.
En effet, le coefficient devant e_n est $b_n.a_n$, et on doit avoir $b_n a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$ on obtient $b_n = 0$.
Si $b_n, b_{n-1}, \dots, b_{n-k}$ sont nuls, pour un $0 \leq k \neq n-2$, alors on a :
$$b_1 C_1 + \ldots + b_{n-k-1} C_{n-k-1} = 0$$
. Le coefficient devant e_{n-k-1} est $b_{n-k-1}.a_{n-k-1}$, et ce coefficient doit être nul. Comme $a_{n-k-1} = 0$ on en déduit que $b_{n-k-1} = 0$. Cela termine la récurrence.
Ainsi, si $b_1 C_1 + \ldots + b_n C_n = 0$, on en déduit que $b_1, \dots, b_n = 0$. Donc la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre, donc elle est de rang n.
Autre preuve, version familles génératrices :
On démontre par récurrence sur $1 \leq k \leq n$ que $Vect(C_1, \dots, C_k) = Vect(e_1, \dots, e_k)$.
Pour $k = 1$ on a $C_1 = \alpha_1 e_1$, avec $a_1 \neq 0$. La propriété est vraie.
Supposons la propriété vraie pour $1 \leq k < n$. Comme $\Pi_{i=1}^n a_i \neq 0$, on a $a_{k+1} \neq 0$.
Le vecteur colonne C_{k+1} s'écrit :
$$C_{k+1} = a_{k+1} e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_{i,k+1} e_i.$$
On a donc
$$e_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}} (C_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_{i,k+1} e_i) \in Vect(e_1, \dots, e_k, C_{k+1}).$$
Avec la propriété au rang k, on obtient que $e_{k+1} \in Vect(C_1, \dots, C_{k+1}))$.
On en déduit que
$$Vect(e_1, \dots, e_{k+1}) \subset Vect(C_1, \dots, C_{k+1}) \subset Vect(e_1, \dots, e_{k+1}),$$
donc ces deux sous-espaces sont égaux.
Cela termine la récurrence.
Cela montre aussi que $Vect(C_1, \dots, C_k)$ est un sous-ev de dimension k.
En appliquant la propriété pour $k = n$, on trouve alors que $rg(A) = rg(C_1, \dots, C_n) = n$.

2. Si $\Pi_{i=1}^n a_i = 0$, il existe un entier i tel que $a_i = 0$. Soit k le plus petit entier tel que $a_k = 0$.
• Si $k = 1$, on a $a_1 = 0$, et donc la colonne C_1 de la matrice A est nulle. On obtient donc que $rg(A) = rg(C_1, \dots, C_n) \leq n - 1 < n$.
• On suppose maintenant $k > 1$.

On a ainsi $a_1, \dots, a_{k-1}$ non-nuls.
On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
D'après la première question, on en déduit que la famille $(C_1, \dots, C_{k-1})$ est de rang $k-1$ (comme sous-famille d'une famille libre). Comme cette famille est incluse dans le sous-ev $Vect(e_1, \dots, e_{k-1})$, de dimension $k-1$, c'est donc une base de ce sous-ev.
On a ainsi

$$Vect(C_1, \dots, C_{k-1}) = Vect(e_1, \dots, e_{k-1}).$$

Comme $a_k = 0$, le vecteur colonne C_k est de la forme $C_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} e_i$. Donc $C_k \in Vect(e_1, \dots, e_{k-1})$.
Le vecteur C_k est donc combinaison linéaire des vecteurs $C_1, \dots, C_{k-1}$. Ainsi, la famille $(C_1, \dots, C_k)$ n'est pas libre (elle est de rang $k-1$).
La famille $(C_1, \dots, C_n)$ ne peut donc pas être de rang n (sinon elle serait libre, et la sous-famille $(C_1, \dots, C_k)$ serait elle aussi libre). Ainsi, $rg(A) = rg(C_1, \dots, C_n) < n$.

Exercice 12.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On définit un endomorphisme φ de E par $\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = 2e_1 + 2e_2$.

1. Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

---

1. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et on a donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + x_3\varphi(e_3) \\ &= (-x_1 + 2x_3, x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2) . \end{aligned}$$

2. Déterminons le noyau de φ :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0 \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} -x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_3 &= \frac{1}{2}x_1 \\ x_2 &= -x_1 \end{cases} .$$

On en déduit que $\ker \varphi = \operatorname{vect}((2, -2, 1))$.

Déterminons maintenant l'image de φ : soit $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{K}^3$,

$$\varphi(x) = y \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_3 &= y_1 \\ x_2 + 2x_3 &= y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= y_3 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} -x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= y_2 - y_1 \\ x_1 + x_2 &= \frac{1}{2}y_3 \end{cases} .$$

Donc il existe $x \in \mathbb{K}^3$ tel que $\varphi(x) = y$ si et seulement si $y_3 = 2(y_2 - y_1)$ et dans ce cas, $\varphi\left((1, \frac{1}{2}y_3 - 1, \frac{y_1+1}{2})\right) = y$. On a donc

$$\operatorname{Im} \varphi = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{K}^3 \mid y_3 = 2(y_2 - y_1)\right\} = \operatorname{vect}((1, 0, -2), (0, 1, 2)) .$$

Exercice 13.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ et que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

- Soit $x \in \ker u$, on a $u(x) = 0$. Donc $v(u(x)) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(v \circ u)$.
- Soit $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $v \circ u(x) = y$. On a donc $v(u(x)) = y$ et $y \in \operatorname{Im} v$.

Dev : Par 5 points du plan affine passe une conique

Exercice 14. Soient P un plan affine, et A, B, C, D, E 5 points distincts de P. On veut montrer qu'il existe une conique Q qui passe par ces 5 points.

1. Rappeler les différentes formes d'une conique dans un plan.
2. **Cas particulier :**
   On suppose que 4 ou 5 points sont alignés.
   Montrer qu'il existe une infinité de coniques passant par les 5 points.
3. **Cas général :** On suppose que les 5 points ne sont pas tous alignés.
   (a) Montrer qu'il existe au moins 3 points qui ne sont pas alignés.
   (b) Quitte à permuter les noms, on suppose que A, B, C ne sont pas alignés. Ces points forment une base affine du plan affine P. Pour M un point de P, on notera (X, Y, Z) ses coordonnées barycentriques

dans cette base.
Soit T une conique dans P.
Donner la forme de l'équation algébrique associée à T, en fonction des coordonnées dans la base affine (A, B, C).

(c) Soit Q une conique passant par A, B, C.
Montrer que l'équation de la conique Q est : (E) $pYZ + qXZ + rXY = 0$, avec $p, q, r \in \mathbb{R}$ des constantes.

(d) On pose (x, y, z) les coordonnées barycentriques de D, et (x', y', z') les coordonnées barycentriques de E.
Montrer que la conique Q passe aussi par D et E si et seulement si p, q, r sont les solutions d'un système linéaire S que l'on déterminera.

4. **Etude du système linéaire : Rang et solution unique**

(a) Montrer que l'on a $rg(S) \leq 2$, où $rg(S)$ désigne le rang du système linéaire S.

(b) En déduire qu'il existe au moins une conique Q passant par A, B, C, D, E.

(c) Montrer qu'il existe une unique conique Q passant par A, B, C, D, E si et seulement si $rg(S) < 2$.

(d) Peut-on avoir $rg(S) = 0$?

5. **Cas où $rg(S) < 2$:**

(a) Soient D_1, D_2, D_3 les trois déterminants extraits de taille 2×2 issus du système S.
Montrer que l'on a $rg(S) < 2$ si et seulement si $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

(b) Montrer que D et E n'appartiennent pas aux droites $(AB), (BC), (CA)$ si et seulement si $xx'yy'zz' \neq 0$.

(c) Montrer que D_1, D_2, D_3 sont égaux aux déterminants : $zz'\begin{vmatrix} 0 & x & x' \\ 0 & y & y' \\ 1 & z & z' \end{vmatrix}$,

$yy'\begin{vmatrix} 0 & x & x' \\ 1 & y & y' \\ 0 & z & z' \end{vmatrix}$, $xx'\begin{vmatrix} 1 & x & x' \\ 0 & y & y' \\ 0 & z & z' \end{vmatrix}$.

6. **Première conclusion :**

(a) On suppose que D et E n'appartiennent pas aux droites $(AB), (BC), (CA)$.
Montrer par l'absurde que l'on a alors $rg(S) = 2$. On pourra s'aider de la question précédente.

(b) On suppose maintenant que $rg(S) = 1$, et que $D \in (AB)$.
Montrer qu'on a alors $E \in (AB)$.

(c) En déduire que si $rg(S) = 1$, alors 4 des 5 points sont alignés.

7. En déduire qu'il existe une unique conique passant par A, B, C, D, E si et seulement si au plus 3 points parmi 5 sont alignés.

8. **Etude du cas où Q est unique :**
On suppose qu'au plus 3 points parmi A, B, C, D, E sont alignés. Alors A, B, C forment un repère affine. Soit Q l'unique forme quadratique passant par A, B, C, D, E, d'équation associée $pYZ + qXZ + rXY = 0$.

(a) Ecrire la matrice M' associée à la conique Q dans la base affine associée.

(b) On suppose que $p = 0$.
Déterminer la forme de la conique Q.
En déduire que 3 points parmi les 5 sont alignés.

9. **Conique dégénérée et déterminant :**

(a) Rappeler la relation entre conique Q non dégénérée et valeurs du déterminant de M'.

(b) Calculer $\det(M')$.

(c) Montrer que Q est non-dégénérée si et seulement si $pqr \neq 0$.

(d) En déduire que si Q est dégénérée, alors 3 points parmi les 5 sont alignés.

10. **Deuxième conclusion :**

(a) Réciproquement, on suppose que 3 points parmi les 5 sont alignés.
Montrer que Q est l'intersection de deux droites.

(b) Soit F le point d'intersection des deux droites. Montrer qu'il existe deux points F', F'' parmi A, B, C tels que (F, F', F'') soit un repère affine.

(c) En écrivant la forme quadratique associée à Q dans le nouveau repère affine, montrer que la conique Q est dégénérée.

11. En déduire que Q est dégénérée si et seulement si 3 points parmi les 5 sont alignés.

■ *Dev : $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions* ■

Exercice 15. Soit H l'ensemble des quaternions. On a $H = \{a + ib + jc + kd,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -k, jk = -i, ki = -j$ (càd $ijk = 1$). C'est une $\mathbb{R}$-algèbre (un $\mathbb{R}$-ev et un anneau).

1. **Rappels sur H :**
   (a) Calculer $ijji$. En déduire la valeur de ji, et montrer que H est un anneau non-commutatif.
   (b) Quelle est la dimension de H en tant que $\mathbb{R}$-ev ? Donner une base de H comme $\mathbb{R}$-ev.
   (c) Pour $x = a + ib + cj + dk \in H$, on pose $\bar{x} = a - ib - jc - dk$.
   Calculer $x\bar{x}$ et montrer que $x\bar{x} \in \mathbb{R}^+$.
   (d) On pose $N(x) = \sqrt{x\bar{x}}$. C'est une norme sur H. En regardant H comme $\mathbb{R}$-e.v., à quelle norme usuelle correspond-elle ?
   Quel type d'e.v. normé est l'ensemble $(H, N(.))$?
   (e) Donner l'expression du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ associé à la norme N.
   (f) Montrer que pour tous $x, y \in H$ on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
   (g) Montrer que pour tout $x \in H$, $x \neq 0$, x est inversible dans H. Donner une expression de x^{-1}
   (h) Montrer que $N(x^{-1}) = \frac{1}{N(x)}$.
   (i) Soit $Z(H)$ le centre de H pour $\times$ (l'ensemble des x tels que $xy = yx$, $\forall y$).
   Montrer que $H = \{a,\ a \in \mathbb{R}\} = Vect(1)$.
2. **Groupe des quaternions de module 1 :**
   (a) On pose $G : \{x \in H \text{ t.q. } N(x) = 1\}$, l'ensemble des quaternions de norme 1 (ou de module 1).
   Montrer que G est un groupe.
   (b) Pour $q \in G$, montrer que $q^{-1} = \bar{q}$.
3. **Automorphismes intérieurs :**
   (a) Soit $q \in G$ de norme 1. On définit $S_q : x \in H \mapsto qxq^{-1} \in H$.
   (b) Montrer que S_q est une application linéaire bijective sur H.
   (c) En utilisant la famille $(1, i, j, k)$, montrer que S_q s'identifie à une matrice de $Gl_4(\mathbb{R})$.
   (d) Soient $q, q' \in H$. Calculer $S_{qq'}(x)$ en fonction de S_q et S'_q.
   (e) En déduire que $S : q \mapsto S_q$ est un morphisme de groupes de G vers $Gl_4(\mathbb{R})$.
   (f) Montrer que $Ker(S) = \{-1, 1\}$.
   (g) Montrer que pour tout $x \in H$, on a $N(S_q(x)) = N(x)$.
   (h) En déduire que $S_q \in O_4(\mathbb{R})$.
   La fonction ϕ est un morphisme de G vers le groupe orthogonal $O_4(\mathbb{R})$.
4. **Restriction à la dimension 3 :**
   (a) On pose $P = Vect(i, j, k)$ l'ensemble des quaternions purs.
   Pour $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire associé à N, montrer que P est l'orthogonal de la droite vectorielle $\mathbb{R} = Vect(1)$.
   (b) Soit $q \in G$. Montrer que $\mathbb{R} = Vect(1)$ est un sous-ev stable par S_q, et que $S_q|_{\mathbb{R}} = Id_{\mathbb{R}}$.
   (c) En déduire que P est un sous-ev stable par S_q.
   (d) On pose $s_q = S_q|_P$.
   (e) Montrer que l'application linéaire $s_q : P \to P$ est bijective, et préserve la norme $N(.)$ sur P.
   (f) En déduire que s_q s'identifie à une matrice de $Gl_3(\mathbb{R})$, qui est dans $O_3(\mathbb{R})$.
   On obtient ainsi $s : q \in G \mapsto s_q \in O_3(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes.
5. **Etude de la restriction :**
   (a) Montrer que $Ker(s) = \{-1, 1\}$.
   (b) Pour $q = a + ib + jc + kd$, montrer que s_q est une matrice dont les coefficients sont des polynômes en les coefficients de q.

(c) En déduire que $q \mapsto s_q$ est une fonction continue (pour les topologies associées aux normes considérées sur G et $O_3(\mathbb{R})$).

(d) Montrer que G est un ensemble connexe de H.

(e) En déduire que $(\det \circ s)(G) = \{1\}$.

(f) En déduire que $s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$.

6. **Etude de la restriction 2 :**

(a) Soit $p = ib + jc + dk \in P \cap H$. Montrer que $s_p(p) = p$.

(b) En déduire que s_p est une rotation orthogonale d'axe $Vect(p)$.

(c) Montrer que $p = -\bar{p}$, et en déduire que $p^2 = -1$.

(d) En déduire que $(s_p)^2 = Id_P$.

(e) En regardant les valeurs propres de s_p, montrer que s_p est la symétrie axiale d'axe $Vect(p)$.

(f) Réciproquement, montrer que pour tout $p' \in P$ non-nul, la symétrie axiale d'axe $Vect(p')$ est dans $Im(s) = s(G)$.

(g) On rappelle que $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les symétries axiales.
En déduire l'ensemble image $Im(s)$.

7. **Conclusion :** En déduire qu'il existe un isomorphisme de $G/\{-1, 1\}$ vers $SO_3(\mathbb{R})$.
Le groupe spécial orthogonal sur $\mathbb{R}^3$ s'identifie au groupe des quaternions de module 1, quotienté par un sous-groupe très facile.